

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CINÉTICA PONTUAL PELO MÉTODO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE E DECOMPOSIÇÃO

Daphne Schwanz e Sérgio de Queiroz Bogado Leite
Instituto de Engenharia Nuclear - IEN

INTRODUÇÃO

As equações de cinética pontual consistem em um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias. Os parâmetros dependentes do tempo neste sistema são a reatividade e a concentração de precursores de nêutrons atrasados. Uma característica das equações de cinética pontual é a de ser um sistema do tipo "Stiff", portanto de difícil solução numérica devido a grande diferença de escala de tempo entre os nêutrons prontos e os nêutrons atrasados.

OBJETIVO

O objetivo consiste na solução em forma analítica da equação de cinética pontual considerando o modelo com 6 grupos de precursores de nêutrons atrasados para reatividade constante e reatividade linear dependente do tempo. Este problema será resolvido usando a combinação dos métodos de Transformada de Laplace [1] e Decomposição [2]. Os resultados obtidos serão comparados com aqueles encontrados recentemente na literatura.

METODOLOGIA

As equações de cinética pontual com 6 grupos de nêutrons precursores sem fonte externa é descrito como:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} n(t) = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \\ \frac{d}{dt} C_i(t) = \frac{\beta_i(t)}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \end{cases}, \quad (1)$$

para $i=1:6$. Com as seguintes condições iniciais

$$n(0) = 1 \quad \text{e} \quad C_i(0) = \frac{\beta_i}{\lambda_i \Lambda}, \quad (2)$$

para $i=1:6$. A ideia da metodologia para a resolução das equações de cinética pontual com 6 grupos de precursores de nêutrons atrasados é considerarmos que a densidade de nêutrons e a concentração de precursores de nêutrons atrasados possam ser escritos segundo o método da Decomposição como

$$n(t) = \sum_{i=0}^N n_i(t) \quad \text{e} \quad C_i(t) = \sum_{j=0}^N C_{ij}, \quad (3)$$

para $j=0:N$. Substituindo (3) em (1) e considerando que $\rho(t) = \rho_0 + \rho_1(t)$ ficamos com o sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (n_0(t) + \dots + n_N(t)) &= \frac{\rho_0 + \rho_1(t) - \beta}{\Lambda} (n_0(t) + \dots \\ &+ n_N(t)) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i (C_{i0}(t) + \dots + C_{iN}(t)) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (C_{i0}(t) + \dots + C_{iN}(t)) &= \frac{\beta_i}{\Lambda} (n_0(t) + \dots + n_N(t)) + \\ &+ \lambda_i (C_{i0}(t) + K + C_{iN}(t)), \end{aligned}$$

para $i=1:6$. Escolhendo o primeiro sistema como

$$\frac{d}{dt} n_0(t) = \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} n_0(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_{i0}(t) \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} C_{i0}(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda} n_0(t) + \lambda_i C_{i0}(t), \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

e para os demais N sistemas ficamos com

$$\frac{d}{dt} n_i(t) = \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} n_i(t) + \sum_{j=1}^6 \lambda_j C_{ij}(t) + \frac{\rho_1(t)}{\Lambda} n_{i-1}(t) \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} C_{ij}(t) = \frac{\beta_j}{\Lambda} n_i(t) + \lambda_j C_{ij}(t)$$

Cumpra salientar que para o primeiro sistema (4) utilizamos a condição inicial (2) e para os demais sistemas tornamos a condição inicial nula. Para a resolução do sistema (5) utilizamos a Transformada de Laplace combinada com a inversão numérica pela Quadratura de Gauss (TLIN) [3]. Já para o sistema (6) utilizamos a Transformada de Laplace com inversão dada pelo Método de Cramer e Heaviside (TLD).

RESULTADOS

Para os resultados numéricos das Tabelas (1-2) consideramos os parâmetros nucleares e usamos como comparação os resultados de [4] e [5], respectivamente.

TABELA 1 - Reatividade ($\rho_0 = 0.003$)

t [s]	TLIN [cm^{-3}]	BBF [cm^{-3}]
0.0	1.0000 ¹ ER=0%	1.0000
0.2	1.8512 ¹ ER=0.0009%	1.8512
0.4	1.9475 ¹ ER=0.0004%	1.9475

BBF=Better Basis Function [4].

TABELA 2 - Reatividade ($\rho_1 = 0.00073 \text{sen}(t)$)

t [s]	TLD [cm^{-3}]	TLD	MD [cm^{-3}]	MD
1	1.1231 ² ER=0.0299%	N=4	1.1235	N=25
2	1.1666 ² ER=0.1265%	N=4	1.1681	N=30
3	1.0710 ² ER=0.2986%	N=4	1.0742	N=53

MD=Método da Decomposição [5].

$${}^1ER = \left| \frac{TLIN - BBF}{TLIN} \right| \times 100 \quad {}^2ER = \left| \frac{TLD - MD}{TLD} \right| \times 100$$

CONCLUSÕES

Conforme os resultados, para $\rho_0 = 0.003$, o método TLIN foi considerado excelente quando comparado com [4], que é considerado uma solução analítica. Já para $\rho_1 = 0.00073 \text{sen}(t)$, observamos que a metodologia de decomposição utilizando apenas quatro sistemas recursivos (N=4) apresentou um bom resultado quando comparado com [5]. Acreditamos que o número de sistemas recursivos foi reduzido devido a inversão da Transformada de Laplace realizada por Heaviside. Trabalhos futuros estão sendo desenvolvidos no sentido de demonstrar a convergência das séries (3), bem como a utilização da continuação analítica para o cálculo com tempos maiores.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Spiegel, M. R. Theory and Problems of Laplace Transforms. Schaum Publishing Co, 1971.
- [2] Adomian, G. A review of the decomposition method in applied mathematics. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 135: p. 501-544, 1988.
- [3] Stroud, A. H., e Secrest, Don. Gaussian Quadrature Formulas. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1966.
- [4] Haofeng L., Wenzhen C., Lei L., Qian Z., 2009. A new integral method for solving the point reactor neutron kinetics equations. Annals of Nuclear Energy, 2009.
- [5] Petersen, C. Z., Vilhena, M.T.M. B., Dulla, S. e Ravetto P. An Analytical Solution of the Point Kinetics Equations with Time Variable reactivity by the Decomposition Method. INAC 2009, 2009.

APOIO FINANCEIRO AO PROJETO

CNEN